1. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dany jest kwadrat $ABCD$. Wierzchołki $A = (-2, 1)$ i $C = (4, 5)$ są końcami przekątnej tego kwadratu.

   Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

   Długość przekątnej kwadratu $ABCD$ jest równa

   A. 10 **B.** $2\sqrt{13}$ **C.** $2\sqrt{10}$ **D.** 8

2. Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), rozważamy dwie proste o równaniach

   $$y = a + b \cdot x \text{ oraz } y = -\frac{1}{a} - \frac{2}{3}b^2 \cdot x, \text{ gdzie } a \neq 0, b \neq 0.$$

   Dokończ zdanie tak, aby było prawdziwe. **Wybierz** odpowiedź **A** albo **B** oraz jej uzasadnienie spośród **1.**, **2.** albo **3.**

   Dla $a = 2$ i $b = -\frac{3}{2}$ rozważane proste są

A.	prostopadłe,	ponieważ	**1.**	$a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = -1.$
B.	równoległe,		**2.**	$(a + b)\left(-\frac{1}{a} - \frac{2}{3}b^2\right) = -1$
			3.	$b = -\frac{2}{3}b^2$

3. **Wyznacz** równanie symetralnej odcinka o końcach $A = (-2, 2)$ i $B = (2, 10)$.

4. Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dany jest trójkąt ABC. Wierzchołki tego trójkąta mają współrzędne: $A = (-15, -8)$, $B = (-6, 4)$, $C = (-19, -5)$.

   4.1. **Wykaż**, że trójkąt ABC jest prostokątny. **Zapisz** obliczenia.

   4.2. Wierzchołki trójkąta ABC są trzema wierzchołkami równoległoboku $ABCD$. Odcinek AC jest przekątną tego równoległoboku. **Oblicz** współrzędne wierzchołka D. **Zapisz** obliczenia.

   4.3. **Uzupełnij** zdanie. **Wpisz** odpowiednie liczby w wyznaczonych miejscach, aby zdanie było prawdziwe. Punkt S przecięcia środkowych trójkąta ABC ma współrzędne: S = (…..… , …...).

5. **Wyznacz** równanie prostej zawierającej środkową CD trójkąta ABC, którego wierzchołkami są punkty: $A = (-2, -1)$, $B = (6, 1)$ i $C = (7, 10)$.

6. Dane są wierzchołki trójkąta ABC: $A = (2, 2)$, $B = (9, 5)$ i $C = (3, 9)$. Z wierzchołka C poprowadzono wysokość tego trójkąta, która przecina bok AB w punkcie D. **Wyznacz** równanie prostej przechodzącej przez punkt D i równoległej do boku BC.

7. Punkty $A = (-1, 1)$ i $C = (1, 9)$ są wierzchołkami trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Podstawa AB tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. **Oblicz** współrzędne wierzchołka B tego trójkąta.

8. **Oblicz** pole kwadratu, którego jednym z wierzchołków jest punkt $A = (1, -3)$ i którego przekątna zawiera się w prostej o równaniu $y = 2x$.

9. Punkty $M = (3, 1)$, $N = (6, 5)$ są kolejnymi wierzchołkami trapezu $KLMN$. Stosunek długości tych podstaw jest równy $1:2$. Dłuższa podstawa zawiera się w prostej o równaniu $4x - 3y - 8 = 0$. **Oblicz** pole trapezu.

10. Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dany jest trójkąt ABC. Podstawa AB tego trójkąta zawiera się w prostej o równaniu $y = -3x + 6$. Wierzchołki A i B leżą – odpowiednio – na osi Oy oraz Ox. Wierzchołek C ma współrzędne (3, 7). **Oblicz** pole trójkąta ABC. **Zapisz** obliczenia.

11. Punkt $A = (-2, 6)$ jest wierzchołkiem rombu $ABCD$ o polu równym 82,5. Przekątna BD tego rombu zawiera się w prostej l o równaniu $2x - y - 5 = 0$. **Wyznacz** współrzędne pozostałych wierzchołków tego rombu.

12. **Napisz** równanie okręgu:
    a) o środku $S = (-1, -2)$ przechodzącego przez punkt $P = (0, 3)$,
    b) o promieniu $r = 4$ stycznego do obu osi układu współrzędnych,
    c) przechodzącego przez punkty $A = (5, 1)$ i $B = (2, -2)$, którego środek leży na prostej $y = 1$.

13. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) punkty $A = (-8, 12)$ i $B = (-2, 4)$ są końcami cięciwy okręgu $\mathcal{O}$. Środek tego okręgu leży na prostej k o równaniu $y = 4x + 2$. **Wyznacz** współrzędne środka okręgu $\mathcal{O}$ i promień tego okręgu. **Zapisz** obliczenia.

14. Dane są okręgi: o_1 o równaniu $(x-6)^2 + (y-4)^2 = 20$ oraz o_2 o równaniu $x^2 + (y-1)^2 = r^2$, gdzie $r \in (0, +\infty)$.
    Dokończ zdania. **Zaznacz** odpowiedź spośród **A-D** oraz odpowiedź spośród **E-H**.
    Okręgi o_1 i o_2 są styczne zewnętrznie dla

    A. $r = \sqrt{2}$ **B.** $r = \sqrt{3}$ **C.** $r = 2$ **D.** $r = \sqrt{5}$

    Okrąg o_2 przechodzi przez środek okręgu o_1 dla

    E. $r = 2\sqrt{5}$ **F.** $r = 6$ **G.** $r = 3\sqrt{5}$ **H.** $r = 4\sqrt{5}$

15. Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dane są okrąg $\mathcal{O}$ o środku w punkcie $S = (3, -4)$ i prosta k o równaniu $2x - y - 11 = 0$. Okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do prostej k w punkcie P.

    15.1. **Wyznacz** i **zapisz** równanie okręgu $\mathcal{O}$.

    15.2. **Oblicz** współrzędne punktu P, w którym okrąg $\mathcal{O}$ jest styczny do prostej k.

16. Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dany jest okrąg O określony równaniem: $(x-2)^2+(y+3)^2=16$.

16.1. **Dokończ** zdania**. Zaznacz** odpowiedź spośród **A–D** oraz odpowiedź spośród **E–G.**
Środek S okręgu O ma współrzędne

A. $S=(2,-3)$ **B.** $S=(-2,-3)$ **C.** $S=(-2,3)$ **D.** $S=(2,3)$

Promień r okręgu O jest równy

E. $r=16$ **F.** $r=4$ **G.** $r=5$

16.2. **Oblicz** współrzędne x punktów przecięcia okręgu O z osią Ox.

17. W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) dany jest okrąg O o równaniu $x^2+y^2=2$ oraz prosta k o równaniu $y=m$, gdzie $m \in \mathbb{R}$.
Uzupełnij zdanie. **Wpisz** odpowiedni przedział w wykropkowanym miejscu, aby zdanie było prawdziwe.
Okrąg O i prosta k mają dwa punkty wspólne tylko wtedy, gdy $m \in$ ..... .

18. Okrąg o środku w punkcie $S=(3,7)$ jest styczny do prostej o równaniu $y=2x-3$. **Oblicz** współrzędne punktu styczności.

19. Funkcja kwadratowa f określona jest wzorem $f(x)=-x^2+2x+3$. Funkcja liniowa g określona jest wzorem $g(x)=-x+5$. **Oblicz** współrzędne punktów, w których przecinają się wykresy funkcji $y=f(x)$ oraz funkcji $y=g(x)$. **Zapisz** obliczenia.

20. a) **Wyznacz** współrzędne punktów wspólnych prostej $y=2x+1$ oraz hiperboli $y=\frac{1}{x}$. **Wykonaj** ilustrację graficzną.
b) **Wyznacz** współrzędne punktów wspólnych prostej $-x+y-2=0$ oraz okręgu $(x+3)^2+(y-2)^2=9$. **Wykonaj** interpretację graficzną.

21. **Rozwiąż** układ równań $\begin{cases} x^2+y^2-4x+4y-17=0 \\ 2x-y-1=0 \end{cases}$. **Zapisz** obliczenia.

22. Na płaszczyźnie, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y), dane są punkty $A = (1,2)$ oraz $B = (3,7)$. Punkty A_O oraz B_O są odpowiednio obrazami punktów A i B w symetrii środkowej o środku w punkcie $O = (0,0)$.
Dokończ zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.
Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez punkty A_O i B_O jest równy

A. $\frac{5}{2}$ **B.** $-\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{2}{5}$ **D.** $-\frac{2}{5}$

Poziom rozszerzony

23. (R) Niech $A=(-4,3)$, $B=(2,1)$, $C=(1,-3)$. **Wyznacz** współrzędne punktu D, tak aby wektor $\overrightarrow{CD}$ był wektorem przeciwnym do wektora $\overrightarrow{AB}$.

24. (R) Dane są punkty: $A=(-3,-1)$, $B=(-1,0)$ i $C=(-2,2)$. **Oblicz** współrzędne i długość wektora: $\vec{u}=2\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

25. (R) Niech $A=(1,3)$, $B=(5,1)$ oraz $C=(4,3)$. **Wyznacz** współrzędne punktu M tak, aby $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-2\cdot\overrightarrow{BC}$. **Oblicz** długość wektora $\overrightarrow{AM}$ i współrzędne jego środka.

26. (R) Dany jest równoległobok, którego boki zawierają się w prostych o równaniach $y=x+b$, $y=x+2b$, $y=b$, $y=2$, gdzie liczba rzeczywista b spełnia warunki: $b\neq 2$ i $b\neq 0$. **Wyznacz** wszystkie wartości parametru b, dla których pole tego równoległoboku jest równe 1.

27. (R) Prosta k o równaniu $x+y-9=0$ przecina parabolę o równaniu $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}$ w punktach A oraz B. Pierwsza współrzędna punktu A jest liczbą dodatnią; pierwsza współrzędna punktu B jest liczbą ujemną. Prosta l jest równoległa do prostej k i styczna do danej paraboli w punkcie C. **Oblicz** odległość punktu C od prostej k oraz pole trójkąta ABC. **Zapisz** obliczenia.

28. (R) **Wyznacz** równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A=(-5,\ 3)$ i $B=(0,6)$, którego środek leży na prostej o równaniu $x-3y+1=0$.

29. (R) **Wyznacz** równania prostych stycznych do okręgu o równaniu $x^2+y^2+4x-6y-3=0$ i zarazem prostopadłych do prostej $x+2y-6=0$.

30. (R) W kartezjańskim układzie współrzędnych $(x,\ y)$ punkt A = (9, 12) jest wierzchołkiem trójkąta ABC. Prosta k o równaniu $y=\frac{1}{2}x$ zawiera dwusieczną kąta ABC tego trójkąta. Okrąg $\mathcal{O}$ o równaniu $(x-8)^2+(y-4)^2=16$ jest wpisany w ten trójkąt. **Oblicz** współrzędne punktu styczności prostej przechodzącej przez wierzchołki B i C tego trójkąta z okręgiem $\mathcal{O}$. **Zapisz** obliczenia.

31. (R) Trapez $ABCD$ jest wpisany w okrąg o równaniu $x^2+y^2-38x+22y-96=0$. Wierzchołek A trapezu ma obie współrzędne ujemne, a odcinek AB jest dłuższą z podstaw tego trapezu. Przekątna AC trapezu $ABCD$ jest zawarta w prostej o równaniu $y=x$. **Oblicz** sinus kąta ABC.

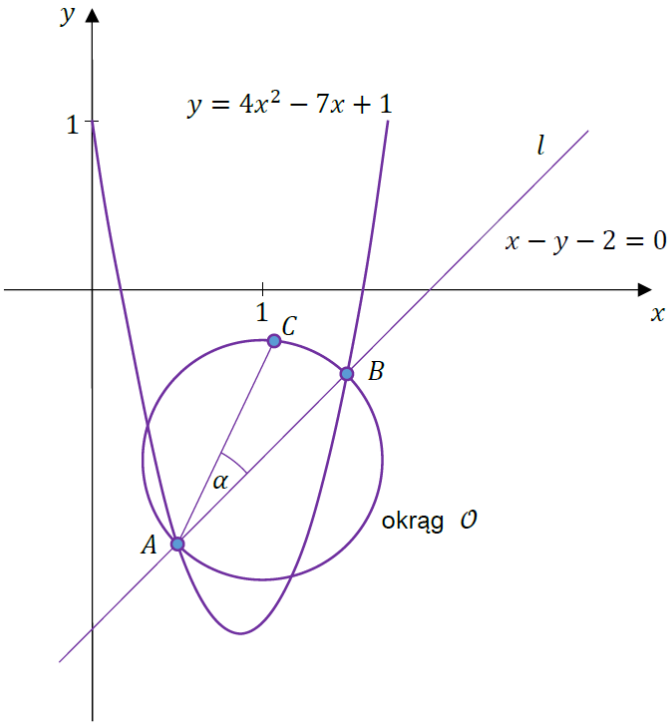
32. (R) Dane są okręgi o równaniach

$$x^2+y^2-12xy-8y+43=0 \quad \text{i} \quad x^2+y^2-2ax+4y+a^2-77=0.$$

Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których te okręgi mają dokładnie jeden punkt wspólny. **Rozważ** wszystkie przypadki.

33. (R) **Wyznacz** promień okręgu o środku w początku układu współrzędnych stycznego zewnętrznie do okręgu $x^2+y^2+6x-8y+21=0$.

34. (R) W kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) prosta l o równaniu $x - y - 2 = 0$ przecina parabolę o równaniu $y = 4x^2 - 7x + 1$ w punktach A oraz B. Odcinek AB jest średnicą okręgu $\mathcal{O}$. Punkt C leży na okręgu $\mathcal{O}$ nad prostą l, a kąt BAC jest ostry i ma miarę α taką, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ (zobacz rysunek).



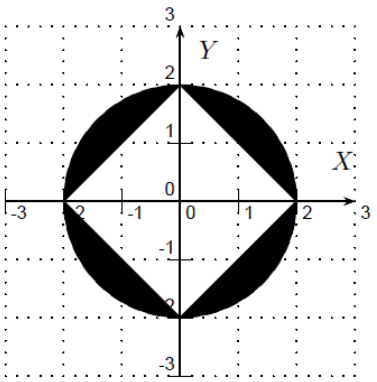
Oblicz współrzędne punktu C. **Zapisz** obliczenia.

35. (R) Punkt $A = (7, -1)$ jest wierzchołkiem trójkąta równoramiennego ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Obie współrzędne wierzchołka C są liczbami ujemnymi. Okrąg wpisany w trójkąt ABC ma równanie $x^2 + y^2 = 10$. **Oblicz** współrzędne wierzchołków B i C tego trójkąta.

36. (R) **Rozwiąż** układ równań $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 24 \\ x^2 - 10x + y^2 - 8y + 40 = 0 \end{cases}$. **Zapisz** obliczenia.

37. (R) Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem takim, że $\overrightarrow{BD} = [-21, -7]$ i $\overrightarrow{DC} = [15, 8]$. **Oblicz** pole tego równoległoboku.

38. (R) **Rozwiąż** graficznie układy nierówności:

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 \\ x + y > 1 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} xy \leq 1 \\ x^2 + y^2 \geq 4 \end{cases}$, c) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \leq x^2 - 2 \end{cases}$.

39. (R) Za pomocą układu nierówności **opisz** zacieniowany na rysunku zbiór punktów.