

1. **Podaj** dziedzinę funkcji i sprowadź ją do najprostszej postaci:

a) $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^4 - 16},$

b) $f(x) = \frac{(x^3 - 1)(x^2 - 4)}{(x^2 + x - 2)(x - 2)}.$

2. Dane są wyrażenia $u = \frac{3x^2 + 12x}{(x-1)(x+4)}$ i $w = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2x + 1}.$

- a) **Wyznacz** dziedzinę każdego z nich.
 b) **Skróć** ułamki u i w .
 c) **Zapisz** $u + w$ w postaci ułamka.

3. Dane jest wyrażenie $w(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right).$

Oceń prawdziwość poniższych zdań. **Zaznacz P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Wartość wyrażenia $w(x)$ jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \neq 1$.	P	F
2.	Wyrażenie $w(x)$ można przekształcić równoważnie do wyrażenia $\frac{2x}{x^2 - 1}$.	P	F

4. **Wykonaj** działania, **określ** dziedzinę:

a) $\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^3 - 8} \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x + 1},$

b) $\frac{x+1}{x-1} : \frac{x^2 + x}{3x - 3},$

c) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3} - \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9},$

d) $\left(x - \frac{x-2}{1+2x} \right) : \left(1 + \frac{x(x-2)}{1+2x} \right),$

e) $\left(\frac{x}{x-y} - \frac{x}{x+y} \right) \cdot \frac{x^2 + xy}{x^2 y^2}.$

5. **Dokończ** zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Miejskami zerowymi funkcji $f(x) = \frac{x^3 - 13x + 12}{x + 4}$ są liczby

A. $-4, 1, 3.$

B. $-3, 1, 4.$

C. $3, 1.$

D. $-4.$

6. Jeżeli do licznika i do mianownika nieskracalnego dodatniego ułamka dodamy połowę jego licznika, to otrzymamy $\frac{4}{7}$, a jeżeli do licznika i do mianownika dodamy 1, to otrzymamy $\frac{1}{2}$. **Wyznacz** ten ułamek.

7. **Dokończ** zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Równanie $\frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} = 0$

A. ma trzy rozwiązania: $x = -2, x = 0, x = 2.$

B. ma dwa rozwiązania: $x = 0, x = -2.$

C. ma dwa rozwiązania: $x = -2$, $x = 2$.

D. ma jedno rozwiązanie: $x = 0$.

8. **Rozwiąż** równanie:

a) $x + 1 = \frac{2}{x}$,

f) $\frac{(4x-1)(x-5)}{(2x-10)(x+3)} = 0$,

b) $\frac{2x-3}{x-3} = 3$,

g) $x + \frac{3}{x-3} = \frac{2x+3}{3-x}$,

c) $\frac{x}{x+1} = \frac{2x}{x-1}$,

h) $\frac{x+2}{x} + \frac{x}{x+2} = 2$,

d) $\frac{2-3x}{1-2x} = -\frac{1}{2}$,

i) $1 + \frac{x}{x+2} = \frac{2x^2}{x^2-4}$,

e) $\frac{3x+2}{3x-2} = 4 - x$,

j) $\frac{x-2}{x} + \frac{1}{x-4} = \frac{4}{x^2-4x}$.

9. Która z podanych równości (A–D) jest prawdziwa? **Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Przesuwając wykres funkcji $f(x) = \frac{-2}{x}$ równoległe do osi OX w prawo o 5 jednostek oraz równoległe do osi OY w dół o 3 jednostki, otrzymasz wykres funkcji:

A. $g(x) = \frac{-2}{x+3} + 5$,

B. $g(x) = \frac{-2}{x-5} - 3$,

C. $g(x) = \frac{-2}{x+5} + 3$

D. $g(x) = \frac{-2}{x-5} + 3$.

10. **Naszkicuj** wykres funkcji, **wyznacz** jej dziedzinę, zbiór wartości, podaj równania asymptot, **oblicz** miejsca zerowe, **określ** argument, dla którego funkcja przyjmuje wartości dodatnie, ujemne, **podaj** przedziały monotoniczności:

a) $f(x) = 1 - \frac{4}{x+2}$,

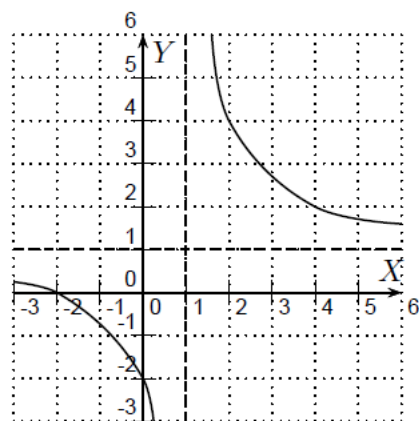
b) $f(x) = \frac{2}{3x-6}$.

11. Odległość między dwiema przystaniami położonymi na rzece wynosi 8 km. Łódka przepływa tę drogę w obie strony w czasie 1 h i 40 minut. **Oblicz** prędkość łódki na wodzie stojącej, jeśli wiadomo, że prędkość prądu rzeki wynosi 2 [km/h].

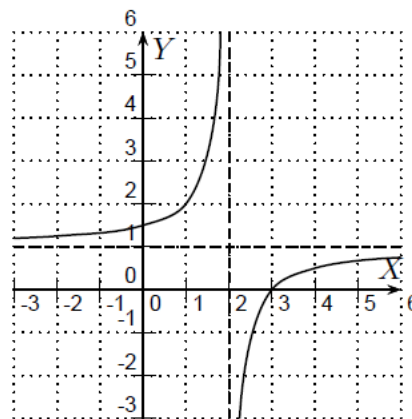
Poziom rozszerzony

12. (R) W oparciu o wykres funkcji wymiernej określonej

wzorem $f(x) = \frac{ax+2}{bx+c}$, **wyznacz** wartości a , b , c .



13. (R) Asymptotą pionową wykresu funkcji f o wzorze $f(x) = \frac{ax+b}{x+d}$, jest prosta o równaniu $x = 2$, a asymptotą poziomą prosta $y = 1$ (zobacz rysunek). **Wyznacz** wzór funkcji f .



14. (R) **Sporządź** wykres funkcji $f(x) = \frac{-3x-6}{x+3}$.
15. (R) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{-3x+41}{x-13}$ dla $x \neq 13$. Punktem kratowym nazywamy punkt w układzie współrzędnych, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi. **Wyznacz** wszystkie punkty kratowe należące do wykresu funkcji f .
16. (R) Punkt $A = (-5, 3)$ jest środkiem symetrii wykresu funkcji homograficznej określonej wzorem $f(x) = \frac{ax+7}{x+d}$, gdy $x \neq -d$. **Oblicz** iloraz $\frac{d}{a}$.
17. (R) Iloczyn liczb x i y jest równy połowie ich sumy. **Wyznacz** liczbę y jako funkcję liczby x dla $x \neq \frac{1}{2}$.
18. (R) Dane jest równanie $-x + xy - y - 3 = 0$. **Wyznacz** y w zależności od x . **Ustal** warunki istnienia takiej zależności oraz x , dla którego y przyjmuje wartość 5.
19. (R) Dany jest trójmian kwadratowy w określony dla $x \in \mathbb{R}$ wzorem $w(x) = (m-4)x^2 + (m+2)x + m+2$. Funkcja f przyporządkowuje każdej wartości rzeczywistej m iloczyn pierwiastków rzeczywistych równania kwadratowego $w(x) = 0$. **Narysuj** wykres funkcji f .
20. (R) **Narysuj** wykres funkcji $f(x) = \frac{|x^2-4|}{2-|x|}$, a następnie **określ**, dla jakich wartości parametru m równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązania.
21. (R) **Sporządź** wykres funkcji $f(x) = \left| \frac{x-4}{x-2} \right|$, a następnie korzystając z tego wykresu, **wyznacz** wszystkie wartości parametru k , dla których równanie $\left| \frac{x-4}{x-2} \right| = k$, ma dwa rozwiązania, których iloczyn jest liczbą ujemną.
22. (R) Rozpatrujemy wszystkie prostokąty o polu równym 6, których dwa sąsiednie boki zawarte są w osiach OX i OY układu współrzędnych. **Wyznacz** równanie krzywej będącej zbiorem tych wierzchołków rozpatrywanych prostokątów, które nie leżą na żadnej z osi układu współrzędnych. **Narysuj** tę krzywą.

23. (R) **Rozwiąż** nierówność:

a) $\frac{3}{x-2} \leq \frac{2}{x+3}$,

b) $\frac{2x-1}{1-x} \leq \frac{2+2x}{5x}$,

c) $x \geq \frac{x+1}{1-x}$,

d) $\frac{2x-5}{3-4x} > 1$,

e) $\frac{(x-2)^3(x-1)}{(x-5)^2(x+1)} \leq 0$,

f) $\frac{x^3-x+6}{x^2} \geq 0$,

g) $x + 4 + \frac{8}{x-4} \geq \frac{-2x-8}{x^2-16}$.

24. (R) **Wyznacz** dziedzinę funkcji f określonej wzorem: $f(x) = \sqrt{\frac{x^3-2x^2-x+2}{x+4}}$.

25. (R) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{1}{x+1} - 1$ dla wszystkich liczb rzeczywistych $x \neq -1$.

Rozwiąż nierówność $f(x) > f(2-x)$.

26. (R) Przedział $\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ jest zbiorem wszystkich rozwiązań nierówności $\frac{2}{x} < m$ z niewiadomą x .

Oblicz m .

27. (R) **Rozwiąż** równanie:

a) $\left| \frac{3}{|x+2|} - 1 \right| = 8$,

b) $\left| \frac{6x-3}{2x+1} \right| = 3$.

28. (R) **Rozwiąż** nierówność:

a) $\frac{1}{|4-3x|} > 2$,

b) $\left| \frac{2x-1}{x+2} \right| < 3$,

c) $\left| \frac{1}{|x|} \right| < 1$.

29. (R) Funkcja homograficzna f jest określona wzorem $f(x) = \frac{px-3}{x-p}$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ jest parametrem i $|p| \neq \sqrt{3}$.

a) Dla $p = 1$ **zapisz** wzór funkcji w postaci $f(x) = k + \frac{m}{x-1}$, gdzie k oraz m są liczbami rzeczywistymi.

b) **Wyznacz** wszystkie wartości parametru p , dla których w przedziale $(p; +\infty)$ funkcja f jest malejąca.