

1. Wyznacz dziedzinę i miejsca zerowe funkcji:

a) $f(x) = \frac{x^3-8}{x^2+2x+4}$,

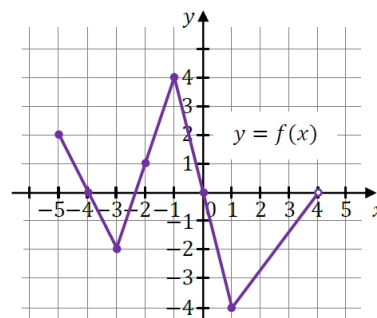
b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+x-6}}$,

c) $f(x) = \sqrt{2-|x|}$,

d) $f(x) = \frac{9-x^2}{3+x}$ oraz sporządź wykres,

e) $f(x) = \frac{2x^2+4}{-x^2+4}$.

2. Na rysunku, w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) , przedstawiono wykres funkcji f określonej dla każdego $x \in [-5, 4)$. Na tym wykresie zaznaczono punkty o współrzędnych całkowitych.



2.1 Zapisz w wykropkowanym miejscu zbiór wartości funkcji f

2.2 Oceń prawdziwość poniższych stwierdzeń. Wybierz P, jeśli stwierdzenie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

1.	Dla każdego argumentu z przedziału $(-4, -2)$ funkcja f przyjmuje wartości ujemne.	P	F
2.	Funkcja f ma trzy miejsca zerowe.	P	F

2.3 Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych. Najmniejsza wartość funkcji f w przedziale $[-4; 0]$ jest równa

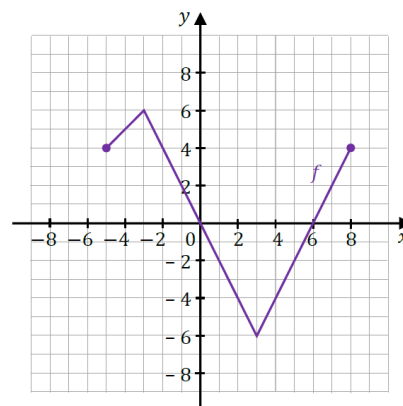
A. (-4)

B. (-3)

C. (-2)

D. 0

3. Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok. Ta funkcja jest określona dla każdej liczby rzeczywistej $x \in [-5, 8]$.

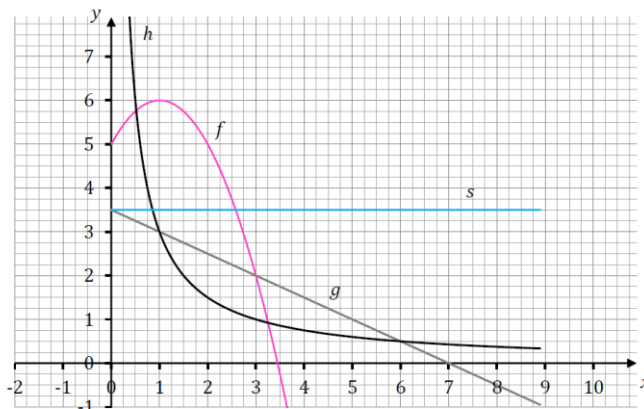


3.1 Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 2$

3.2 Zapisz w miejscu wykropkowanym poniżej maksymalny przedział lub maksymalne przedziały, w których funkcja f jest malejąca

3.3 Uzupełnij zdanie. Wpisz odpowiednie liczby w wykropkowanych miejscach, aby zdanie było prawdziwe. Największa wartość funkcji f jest równa liczbie, a najmniejsza wartość funkcji f jest równa liczbie

4. W kartezjańskim układzie w współrzędnych (x, y) przedstawiono fragmenty wykresów czterech funkcji: f, g, h, s .



4.1. **Dokończ** zdanie. **Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych. Największą wartość dla argumentu $x = 2$ przyjmuje funkcja

- A. f B. g C. h D. s

4.2. **Dokończ** zdanie. **Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych. Dla argumentu $x = 3$ tę samą wartość przyjmują funkcje

- A. f i s B. s i h C. f i g D. g i s

4.3. **Zapisz** maksymalny przedział, w którym prawdziwa jest nierówność $g(x) > h(x)$.

5. **Wyznacz** wzór funkcji $g(x) = f(x - 3) - 1$, gdy $f(x) = x^2$ i **sporządź** jej wykres.

6. Dana jest funkcja $y = f(x)$, której wykres przedstawiono w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y) na rysunku obok.

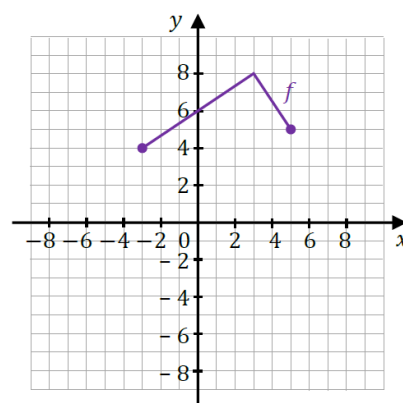
Ta funkcja jest określona dla $x \in [-3, 5]$.

Funkcje g oraz h są określone za pomocą funkcji f następująco:

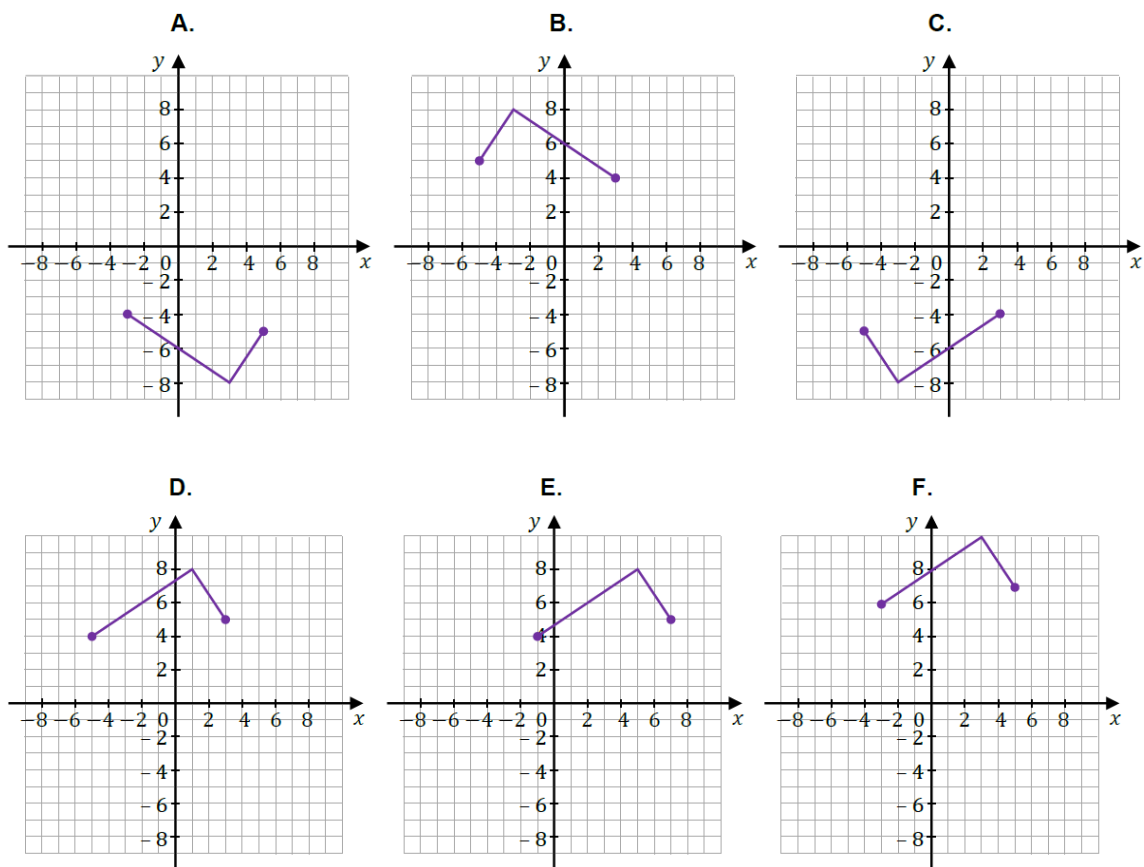
- $y = g(x) = f(x + 2)$
- $y = h(x) = f(-x)$

Na rysunkach **A–F** przedstawiono wykresy różnych funkcji – w tym wykresy funkcji g oraz h .

Każdej z funkcji $y = g(x)$ oraz $y = h(x)$ przyporządkuj jej wykres. **Wpisz** obok symboli funkcji w tabeli poniżej właściwe odpowiedzi wybrane spośród **A–F**. (im zad 20)



Nr zadania	Funkcja	Rysunek
6.1	$y = g(x)$	
6.2	$y = h(x)$	



7. Dana jest funkcja $f(x) = NWD(x, 4)$ dla $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, gdzie zapis $NWD(x, 4)$ oznacza największy wspólny dzielnik liczb x i 4.

a) **Uzupełnij** tabelę

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$								

b) **Naszkicuj** wykres funkcji f .

c) **Podaj** zbiór wartości funkcji $g(x) = f(x) + 3$.

8. Wiadomo, że dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x-7}{2x+a}$ jest zbiór $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Wówczas

A. $a = 2$

B. $a = -2$

C. $a = 4$

D. $a = -4$

9. **Sprawdź**, czy punkt A należy do wykresu funkcji f , gdy

a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$, $A = \left(\sqrt{3}, \frac{5}{2}\right)$,

b) $f(x) = |\sqrt{2} - x|$, $A = (\sqrt{2} + 1, 1)$,

c) $f(x) = 3^{|x-1|}$, $A = \left(-2, \frac{1}{27}\right)$,

d) $f(x) = x^{-3}$, $A = \left(-\frac{1}{2}, -8\right)$.

10. Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = x^3 - b - 5\sqrt{2}$ dla każdej liczby rzeczywistej x .
Miejszem zerowym funkcji f jest $x = \sqrt{2} + 1$.

Dokończ zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Współczynnik b we wzorze funkcji f jest równy

- A. $b = 1$. B. $b = 7$. C. $b = 1 - 3\sqrt{2}$. D. $b = 3 - 3\sqrt{2}$.

11. Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{-3x+41}{x-13}$ dla $x \neq 13$. Punktem kratowym nazywamy punkt w układzie współrzędnych, którego obie współrzędne są liczbami całkowitymi. **Wyznacz** wszystkie punkty kratowe należące do wykresu funkcji f .

12. Dany jest wykres pewnej funkcji, gdzie $x \in \mathbb{R}$.

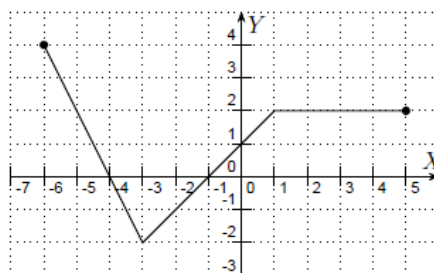
Sporządź wykres funkcji:

a) $y = f(x - 2) - 1$,

b) $y = -f(-x)$,

c) $(\mathbb{R}) y = |f(x)|$.

Opisz przekształcenia jakie wykonałeś.



13. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$ określonej dla $x \in \langle -6; 6 \rangle$.

Korzystając z wykresu funkcji **zapisz**:

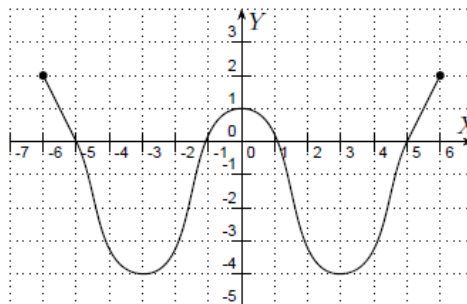
a) maksymalne przedziały, w których funkcja jest rosnąca,

b) zbiór argumentów, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie,

c) największą wartość funkcji f w przedziale $\langle -5; 5 \rangle$,

d) miejsca zerowe funkcji $g(x) = f(x - 1)$,

e) najmniejszą wartość funkcji $h(x) = f(x) + 2$.



14. Czas T połowicznego rozpadu izotopu promieniotwórczego to czas, po którym liczba jąder danego izotopu (a zatem i masa tego izotopu) zmniejsza się o połowę – tzn. połowa jąder danego izotopu przemienia się w inne jądra. Liczba jąder $N(t)$ izotopu promieniotwórczego pozostających w próbce po czasie t , licząc od chwili $t_0 = 0$, wyraża się zależnością wykładniczą:

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$$

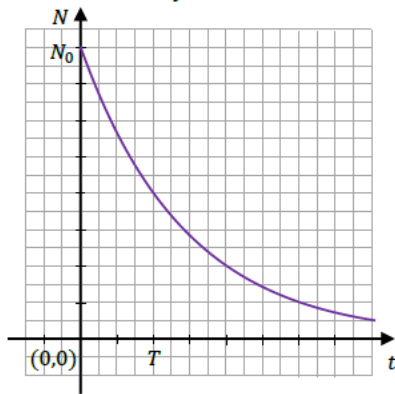
gdzie N_0 jest liczbą jąder izotopu promieniotwórczego w chwili początkowej $t_0 = 0$.

14. 1. Na poniższych rysunkach **1–4**, przedstawiono wykresy różnych zależności.

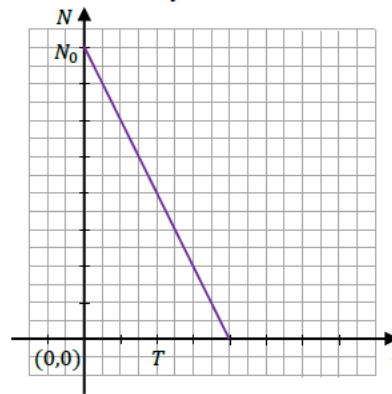
3. Funkcje i ich własności

mgr Magdalena Kucharska, mgr Anna Piłat

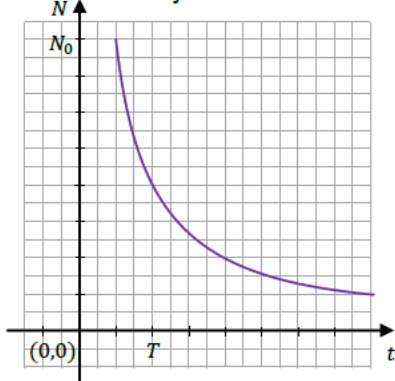
Rysunek 1.



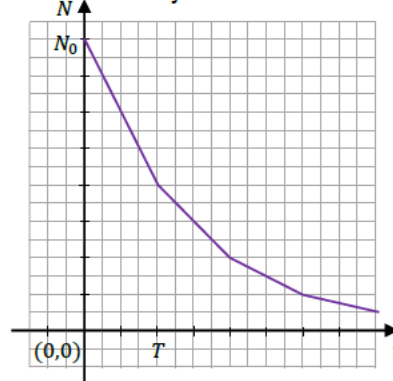
Rysunek 2.



Rysunek 3.



Rysunek 4.



Dokończ zdanie. Zaznacz właściwą odpowiedź spośród podanych. Wykres zależności wykładniczej $N(t)$ – opisanej we wstępie do zadania – przedstawiono na

A. rysunku 1.

B. rysunku 2.

C. rysunku 3.

D. rysunku 4.

14. 2. Czas połowicznego rozpadu węgla ^{14}C to około 5700 lat. Naukowcy oszacowali za pomocą datowania radiowęglowego, że masa izotopu węgla ^{14}C w pewnym organicznym znalezisku archeologicznym stanowi $\frac{1}{16}$ masy tego izotopu, jaka utrzymywała się podczas życia organizmu.



Oblicz, ile lat ma opisane znalezisko archeologiczne. Wynik **podaj** z dokładnością do stu lat.

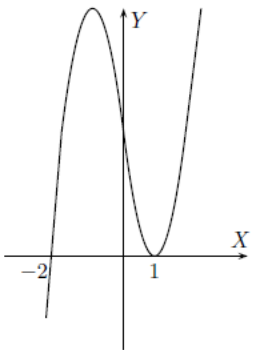
Poziom rozszerzony

15. (R) **Znajdź** miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{\sin 3x - \sin x}{x}$.

16. (R) **Opisz** sposób, w jaki należy przekształcić wykres funkcji f aby otrzymać wykres funkcji g , gdy:

a) $f(x) = \sin 3x \wedge g(x) = \sin(3x + \pi)$,

b) $f(x) = 2x^2 \wedge g(x) = 2x^2 - 12x + 12$.

17. (R) **Narysuj** wykres funkcji $f(x) = \frac{|x^2-9|}{3-x}$. **Wyznacz** wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $f(x) = m$ nie ma rozwiązania. **Zapisz** obliczenia.
18. (R) Funkcja okresowa f ma okres podstawowy 2. **Naszkicuj** wykres tej funkcji, jeżeli dla $x \in (-2, 0)$ określona jest wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$.
19. (R) **Wskaż** przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x - [x]$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą z x .
20. (R) Rysunek przedstawia fragment wykresu pewnej funkcji wielomianowej w stopnia trzeciego. Jedynymi miejscami zerowymi tego wielomianu są liczby (-2) oraz 1 , a pochodna $w'(-2) = 18$.
- a) **Wyznacz** wzór wielomianu w .
- b) **Wyznacz** równanie prostej stycznej do wykresu tego wielomianu w punkcie o odciętej $x = 3$.
- 
21. (R) Dane są funkcje k oraz p . Funkcja k jest określona wzorem $k(x) = 5 - x^2$ dla każdej liczby rzeczywistej x . Funkcja p jest określona wzorem $p(x) = \sqrt{1-x}$ dla każdej liczby rzeczywistej x nie większej od 1. Funkcje f oraz g są określone następująco: $f = k \circ p$ oraz $g = p \circ k$. **Wyznacz** wzory i dziedziny funkcji f oraz g .