1. **Wyznacz** długości boków trójkąta prostokątnego ABC oraz wartości funkcji trygonometrycznych kąta $\measuredangle CAB$ mając dane $\sin\measuredangle(CAB) = \frac{4}{5}$ i $|BC| = 2$.

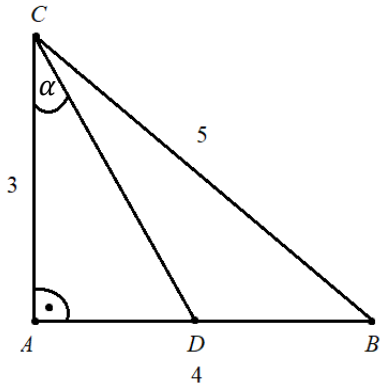
2. **Wyznacz** wartości funkcji trygonometrycznych kątów ostrych trójkąta prostokątnego, w którym dana przyprostokątna jest dwa razy dłuższa od drugiej przyprostokątnej.

3. Dany jest prostopadłościan o krawędziach podstawy 1 dm, 2 dm i wysokości 30 cm. **Podaj** wartości funkcji trygonometrycznych kąta zawartego między przekątną podstawy a przekątną prostopadłościanu.

4. **Oblicz** długości przyprostokątnych trójkąta prostokątnego, jeżeli α jest jednym z dwóch kątów ostrych trójkąta oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ i długość przeciwprostokątnej równa jest 15 cm.

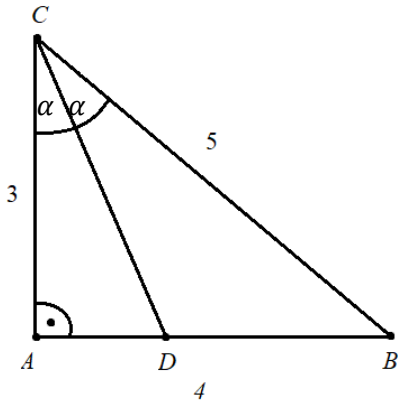
5. **Wyznacz** wartości funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:
   a) $\sin(90° - \alpha) = \frac{3}{10}$,
   b) $\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \frac{2}{5}$.

6. **Dokończ zdania. Zaznacz** odpowiedź spośród **A–D** oraz odpowiedź spośród **E–H**.
   Odcinek CD jest środkową w trójkącie prostokątnym ABC takim jak na rysunku o bokach długości 3, 4, 5.
   Wtedy



   A. $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$.
   C. $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{3}{4}$.

   Odcinek CD jest zawarty w dwusiecznej kąta ACB trójkąta prostokątnego ABC takiego jak na rysunku o bokach długości 3, 4, 5.
   Wtedy



   E. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$. **F.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.
   G. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}$. **H.** $\operatorname{tg}\alpha = 1$.

7. **Dokończ zadanie. Zaznacz** dwie odpowiedzi, tak aby dla każdej z nich dokończenie zdania było prawdziwe.
   Kąt α jest ostry i $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, wtedy
   A. $0° < \alpha < 30°$. **B.** $30° < \alpha < 45°$. **C.** $45° < \alpha < 60°$.
   D. $60° < \alpha < 90°$. **E.** $\cos\alpha = \frac{4}{13}$. **F.** $\operatorname{tg}\alpha = 3$.
   G. $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{17}{13}$.

8. Czy istnieje kąt α, dla którego:

   a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge \ \sin(90° - \alpha) = \frac{1}{2}$,

   b) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5} - 2 \ \wedge \ \operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{5} + 2$,

   c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4} \ \wedge \ \sin\alpha = \frac{3}{5}$,

   d) $3\cos\alpha - 2 = 6$,

   e) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \ \wedge \ \cos\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

9. **Wyznacz** kąty trójkąta prostokątnego wiedząc, że:

   a) iloczyn sinusa jednego kąta ostrego i cosinusa drugiego kąta ostrego wynosi $\frac{1}{4}$.

   b) kwadrat odwrotności tangensa kąta ostrego wynosi 3.

10. W trójkącie prostokątnym, w którym przyprostokątne mają długości 2 i 4, jeden z kątów ostrych ma miarę α. **Oblicz** $\sin\alpha\cos\alpha$.

11. Kąt α jest ostry i $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$. **Oblicz** wartość wyrażenia $2\sin\alpha\cos\alpha$.

12. Kąt $\alpha \in (0°, 180°)$ oraz wiadomo, że $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

    Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
    Wyrażenie $(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + 2$ przyjmuje wartość

    A. 4 **B.** $3\frac{1}{2}$ **C.** 3 **D.** $2\frac{1}{2}$

13. Kąt α jest ostry oraz $4\operatorname{tg}\alpha = 3\ \sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$.

    Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.
    Tangens kąta α jest równy

    A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{4}{3}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 4

14. Korzystając z tożsamości $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ **wyznacz** wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego, gdy $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{7}$.

15. Wiedząc, że α jest kątem ostrym i $\operatorname{tg}\alpha = 2$, **oblicz** wartość wyrażenia $\frac{4\cos\alpha - \sin\alpha}{3\cos\alpha + 5\sin\alpha}$.

16. **Oblicz** $a - b$, gdy $a = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, $b = 1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$ dla $\alpha = 60°$.

17. Wartość wyrażenia $\frac{\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{tg}60° - 4\sin^2 60°}{\cos^2 40° + \cos^2 50°}$ **sprowadź** do najprostszej postaci.

18. Liczba $3\cos^2 67° + 2\cos^2 23° + \sin^2 67°$ jest równa

    A. 3 **B.** 1 **C.** $\cos^2 67°$ **D.** $2\sin^2 23°$

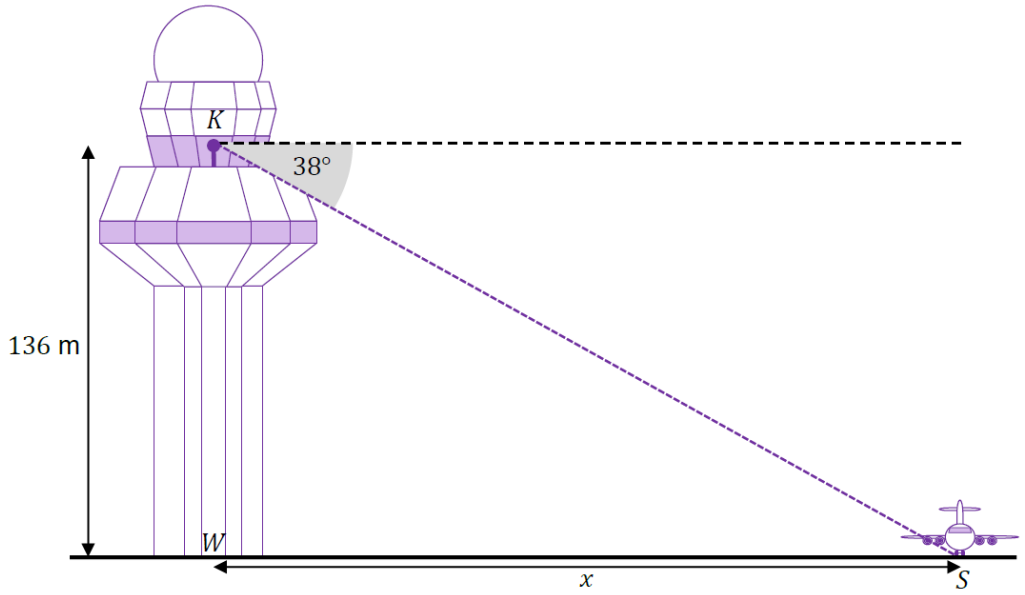
19. Kąt $\alpha \in (0°;\ 180°)$ i $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$. **Oblicz** wartość wyrażenia $\sin\alpha\cos\alpha$.

20. W trójkącie prostokątnym jedna z przyprostokątnych ma długość a. Kąt ostry przy tym boku ma miarę α. **Wykaż**, że $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$.

21. **Wykaż**, że gdy α i β są kątami ostrymi trójkąta prostokątnego, to $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = 1$.

22. Drabina tworzyła ze ścianą domu kąt 60° i jej koniec sięgał na wysokość 2,5 m domu. Po zmianie położenia drabiny tworzy ona z ziemią kąt 60°. Ile metrów, licząc od podłoża, sięga obecnie drabina? Wynik **podaj** z dokładnością do 0,1 m.

23. Z okna wieży kontroli lotów widać startujący samolot S pod kątem 38° do poziomu. Kontroler K znajduje się na wysokości 136 m od płyty lotniska (zobacz rysunek).



Oblicz odległość x samolotu S od podstawy W tej wieży. Wynik **podaj** w zaokrągleniu do pełnych metrów. **Zapisz** obliczenia.

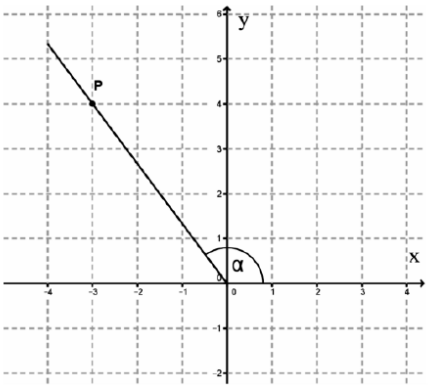
24. Dany jest kąt o mierze α taki, że $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ oraz $90° < \alpha < 180°$.

Oceń prawdziwość poniższych zadań. **Zaznacz P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Dla kąta α spełnione jest równanie: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.	**P**	**F**
2.	Dla kąta α spełnione jest równanie: $\lvert\operatorname{tg}\alpha\rvert = \frac{3}{4}$.	**P**	**F**

25. Na rysunku przedstawiono kąt α, którego końcowe ramię przechodzi przez punkt $P = (-3, 4)$.

Oceń prawdziwość poniższych zdań . **Zaznacz P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.



1.	Dla kąta α zachodzi równość spełnione $\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{12}{25}$.	**P**	**F**
2.	Dla kąta α spełnione jest równanie: $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$.	**P**	**F**

26. **Wybierz** zdanie prawdziwe **A, B** albo **C** oraz zdanie **1., 2.** albo **3.** uzasadniające takie stwierdzenie.

A.	$\sin 150° + \sin 30° = 1$	**1.**	$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $\cos 60° = \frac{1}{2}$
B.	$\cos 150° \cdot \cos 30° = \frac{3}{4}$	**2.**	$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$ $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$
C.	$\cos 120° + \sin 120° = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	**3.**	$\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$ $\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Poziom rozszerzony

27. (R) **Naszkicuj** w układzie współrzędnych kąt α taki, że:

a) $\sin\alpha = -\frac{1}{3} \ \wedge \ \alpha \in \langle 270°; 360° \rangle$,

b) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$,

c) $\operatorname{tg}\alpha = 2 \ \wedge \ \alpha \in \langle 180°; 270° \rangle$,

d) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{5}{3}$.

28. (R) **Wyznacz** wartości funkcji trygonometrycznych kąta:

a) $\beta = 120°$,

b) $\beta = 210°$,

c) $\beta = 315°$.

29. (R) **Oblicz:**

a) $\sin 765°$,
b) $\mathrm{tg}(-750°)$,
c) $\sin(-7\pi)$,
d) $\mathrm{tg}\,\frac{13}{3}\pi$,
e) $\cos(-450°)$,
f) $\cos\frac{15}{2}\pi$,
g) $\sin(-1710°)$,
h) $\mathrm{ctg}(-1395°)$,
i) $\mathrm{ctg}(-\frac{23}{4}\pi)$,

30. (R) **Wyznacz** wartości funkcji trygonometrycznych kąta x, gdy:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \ \wedge \ x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$,
b) $\mathrm{tg}\,x = -3 \ \wedge \ x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$,
c) $\cos x = \frac{2}{3}$.

31. (R) Miary pięciu kątów tworzą ciąg arytmetyczny. Drugim wyrazem tego ciągu jest 150° a czwartym 270°. **Oblicz** sumę sinusów tych pięciu kątów.

32. (R) **Wykaż**, że $\frac{-\cos 2x}{\sin x \cos x} = \mathrm{tg}\,x + \frac{1}{\mathrm{tg}\,x}$ nie jest tożsamością.

33. (R) **Sprawdź** czy podana równość jest tożsamością trygonometryczną:

a) $1 - (\cos x - \sin x)^2 = 2\sin x \cos x$,
b) $1 - \cos x = \frac{\mathrm{tg}\,x - \sin x}{\mathrm{tg}\,x}$ dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \wedge \ k \in Z$,
c) $\frac{\cos^2 x}{1-\sin^2 x} = \left(\frac{\sin^2 x}{1-\cos^2 x}\right)^{-1}$,
d) $\cos x\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,x} = -1$ dla $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$,
e) $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$ dla $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right) \wedge k \in Z$.

34. (R) **Wykaż**, że dla każdego kąta α prawdziwa jest równość: $4(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 1 + 3\cos^2 2\alpha$.

35. (R) Na podstawie wzoru: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$, **oblicz** $\sin 75°$.

36. (R) **Rozwiąż** równanie:

a) $\cos 3x = \sin\frac{5}{6}\pi$,
b) $\mathrm{tg}\,x = \sin x$, gdy $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$,
c) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 1$,
d) $\mathrm{ctg}\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, gdzie $x \in (-\pi; 0)$,
e) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

37. (R) **Wyznacz** wszystkie rozwiązania równania $2\cos^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ należące do przedziału $\langle 0; 2\pi\rangle$.

38. (R) **Rozwiąż** równanie:
    a) $\sqrt{3}\cos x = 1 + \sin x$ w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$,
    b) $\sin 5x - \cos 2x + \sin x = 0$,
    c) $2\sin 5x \sin 3x = 1 - \cos 8x$,
    d) $\sin 6x + \cos 3x = 2\sin 3x + 1$ w przedziale $\langle 0;\ \pi\rangle$,
    e) $(\cos x)\left[\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\sin x$,
    f) $\sin\left(x + \frac{1}{4}\pi\right)\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$,
    g) $6\sin x + 2\sqrt{3}\cos x + 3\,\mathrm{tg}\,x + \sqrt{3} = 0$,
    h) $3\cos 2x + 10\cos^2 x = 24\sin x - 3$ dla $x \in \langle 0; 2\pi\rangle$,
    i) $4\sin 4x \cos 6x = 2\sin 10x + 1$,
    j) $\frac{5\cos^2 x + \sin x - 1}{1 - \sin^3 x} = 2$ w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$,
    k) $\cos^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x \cos x - \sin^2 x = 0$ w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$,
    l) $\sin^2 2x + 1 = 7\cos^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)$ dla $x \in \langle -2\pi; 2\pi\rangle$.

39. (R) **Rozwiąż** nierówność:
    a) $(2 - \cos x)^2 \leq 4\sin^2\frac{x}{2} - 4\cos^2\frac{x}{2} + 4{,}75$ w zbiorze $(0; 2\pi)$,
    b) $3\sin^2 x - 4\cos^2 x \sin^2 x \geq 0$ w przedziale $\langle -\pi; \pi\rangle$,
    c) $\frac{2\cos x - \sqrt{3}}{\cos^2 x} < 0$ w przedziale $\langle 0{,}2\pi\rangle$.

40. (R) **Wyznacz** dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{1 - 2\cos\frac{x}{2}}$.

41. (R) **Rozwiąż** algebraicznie i **graficznie** nierówność $|\cos x| + \cos x > 1$ w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$.

42. (R) Dana jest funkcja f określona wzorem $f(x) = \frac{\sin^2 x - |\sin x|}{\sin x}$ dla $x \in (0;\ \pi) \cup (\pi; 2\pi)$.
    a) **Naszkicuj** wykres funkcji f.
    b) **Wyznacz** miejsca zerowe funkcji f.

43. (R) Dana jest funkcja: $f(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x,\ x \in R$.
    a) **Naszkicuj** wykres funkcji f.
    b) **Rozwiąż** równanie $f(x) = 1$.

44. (R) a) **Naszkicuj** wykres funkcji $y = \sin 2x$ w przedziale $\langle -2; 2\pi\rangle$.
    (R) b) **Naszkicuj** wykres funkcji $y = \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x}$ w przedziale$\langle -2\pi; 2\pi\rangle$ i **zapisz**, dla których liczb z tego przedziału spełniona jest nierówność $\frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} < 0$.

45. (R) **Naszkicuj** wykres funkcji $f(x) = \sin 2x \,|\mathrm{tg}\, x|$. Z wykresu **odczytaj** i **zapisz** rozwiązanie równania $f(x) = 1$.

46. (R) **Naszkicuj** wykres funkcji $f(x) = \frac{\cos x + |\sin x|}{\cos x}$ dla $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$. **Podaj** zbiór rozwiązań nierówności $0 \leq f(x) < 2$.

47. (R) a) Dla jakich wartości parametru m równanie $3\cos x - 2 = m$ ma rozwiązanie.
(R) b) Dane jest równanie $\sin x = a^2 + 1$, z niewiadomą x. **Wyznacz** wszystkie wartości parametru a, dla których dane równanie nie ma rozwiązań