

1. **Przedstaw** liczbę 0 w postaci:

- a) ilorazu dwóch liczb wymiernych,
- b) różnicy dwóch pierwiastków różnych stopni,
- c) iloczynu dwóch potęg o różnych podstawach.

2. **Dokończ** zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.Wartość wyrażenia $2021: \left(1 - \frac{1}{2022}\right) - \left(1 - \frac{2022}{2021}\right) : \frac{1}{2021}$ jest równa

- A. 0 B. 1 C. 2021 D. 2023

3. a) **Podaj** przykłady trzech liczb wymiernych m, k, l spełniających warunek $\frac{1}{4} < m < k < l < \frac{8}{25}$,b) **Wyznacz** ułamek o mianowniku 250, który jest większy od 0,(8) i jednocześnie mniejszy od $\frac{23}{25}$.4. **Oblicz:**

- a) $3 + 2,(9)$,
- b) $2 + 3,(4)$,
- c) $6 - 2,(7)$,
- d) $2 \cdot 0,(1) + 0,(7)$,
- e) $1,(09) + 0,(90)$,
- f) Zamień liczbę $1,24(36)$ na ułamek zwykły.

5. Niech $a = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11^5$ i $b = 4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^4$.a) **Wyznacz** $NWW(a, b)$ i $NWD(a, b)$.b) **Oblicz** $\frac{NWW(a, b)}{NWD(a, b)}$.c) **Wykaż**, że $NWW(a, b) \cdot NWD(a, b) = a \cdot b$.6. O liczbie x wiadomo, że $NWD(6, x) = 3$ oraz $NWW(6, x) = 90$. **Oblicz** x .7. **Oceń** prawdziwość poniższych zdań. **Zaznacz P**, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo **F** – jeśli jest fałszywe.

1.	Liczba $3^{33} + 3^{33} + 3^{33}$ jest równa 9^{17} .	P	F
2.	Odwrotnością liczby $2 + \sqrt{5}$ jest liczba $2 - \sqrt{5}$.	P	F

8. **Przedstaw** liczbę $\frac{27^{665} \cdot \sqrt[3]{3^{-92}}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{152}{3}}}$ w postaci potęgi liczby 3.9. **Przedstaw** liczbę $\frac{4^{-1-3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}}{5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}$ w postaci nieskracalnego ułamka zwykłego.

10. Oblicz:

a) $\sqrt{-2\sqrt[3]{-8}}$,

b) $\sqrt[7]{-\sqrt[6]{-\sqrt[5]{-1}}}$,

c) $\left(\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{3}}\right)^3\right)^5$,

d) $\frac{\sqrt[3]{-60} \cdot \sqrt[3]{50}}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6}}$,

e) $\sqrt{x} - \sqrt{8} = \sqrt{32}$,

f) $\frac{1}{x} = \sqrt[3]{0,064}$.

11. Która z podanych równości (A–D) jest prawdziwa? **Wybierz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. $(\sqrt{7} + \sqrt{5})^3 = \sqrt{7^3} + \sqrt{5^3}$

B. $\sqrt{\sqrt{144} + \sqrt{16}} = 2^{\frac{4}{2}}$

C. $\left(\sqrt{2\frac{1}{4}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^3$

D. $(\sqrt[3]{64})^{\frac{1}{8}} = 8^3$

12. Dane są liczby $a = \sqrt{5} - 2$ oraz $b = \sqrt{5} + 2$. **Oblicz** wartość wyrażenia $\frac{a \cdot b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$ dla podanych a i b .

13. Rozważmy takie liczby rzeczywiste a i b , które spełniają warunki: $a \neq 0$ oraz $b \neq 0$ oraz $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = 0$. **Oblicz** wartość liczbową wyrażenia $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b , spełniających powyższe warunki. Wynik **podaj** w postaci ułamka bez niewymierności w mianowniku.

14. Okres T drgań wahadła w pewnym zegarze dany jest wzorem: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, gdzie l oznacza długość wahadła, a g oznacza przyspieszenie grawitacyjne. **Przyjmij** do obliczeń, że przyspieszenie grawitacyjne na Ziemi wynosi $g_Z = 9,81 \text{ m/s}^2$, a przyspieszenie grawitacyjne na Księżycu wynosi $g_K = 1,62 \text{ m/s}^2$. **Oblicz** $\frac{T_K}{T_Z}$ – stosunek okresu drgań tego wahadła, gdyby znajdowało się ono na Księżycu, do okresu drgań tego samego wahadła znajdującego się na Ziemi. **Wynik** podaj z dokładnością do 0,01.

15. Dane są liczby $x = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-4}$ i $y = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$. **Uzasadnij**, że $x < y$.

16. Dane są liczby $a = 3,6 \cdot 10^{-12}$ oraz $b = 2,4 \cdot 10^{-20}$. **Dokończ** zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.

Ich iloraz $\frac{a}{b}$ jest równy:

A. $8,64 \cdot 10^{-32}$

B. $1,5 \cdot 10^{-8}$

C. $1,5 \cdot 10^8$

D. $8,64 \cdot 10^{32}$

mgr Magdalena Kucharska, mgr Anna Piłat

17. **O ile** procent liczba x jest większa od liczby y , jeżeli $x = \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{15}\right) : \left(\frac{11}{20} - 0,2\right)$, $y = (0,5 \cdot 3)^{-2} \cdot 2^3 \cdot 3^{-1}$?
18. Pensja pana X jest o 50% wyższa od średniej krajowej, a pensja pana Y jest o 40% niższa od średniej krajowej. **Dokończ** zdania. **Zaznacz** odpowiedź spośród **A–D** oraz odpowiedź spośród **E–H**.
- 18. 1.** Pensja pana X jest wyższa od pensji pana Y
- A.** o 40% pensji pana Y. **B.** o 90% pensji pana Y.
C. o 150% pensji pana Y. **D.** o 275% pensji pana Y.
- 18. 2.** Pensja pana Y jest niższa od pensji pana X
- E.** o 60% pensji pana X. **F.** o 73% pensji pana X.
G. o 90% pensji pana X. **H.** o 150% pensji pana X.
19. Cenę towaru obniżono o 60%, a następnie podniesiono o $p\%$. **Wyznacz** p , jeśli w ten sposób otrzymano cenę sprzed obniżki.
20. Cena brutto kurtki zimowej wynosi 307, 50 zł. Na cenę tę składa się cena netto oraz 23% podatku VAT. **O ile** zmniejszy się cena netto tej kurtki, jeśli po obniżce ceny podatek VAT będzie wynosił 51,75 zł?
21. Świeżo skoszona trawa zawiera 60% wody, a wysuszone siano tylko 15% wody. **Oblicz**, ile kilogramów wysuszonego siana można otrzymać z 1 tony świeżo skoszonej trawy? Wynik podaj w zaokrągleniu do pełnych kilogramów.
22. **Ile** kilogramów wody należy dodać do 0,5 kg 30 procentowego roztworu soli, aby otrzymać roztwór pięcioprocentowy?
23. W 1995 roku zbiory kawy na świecie wynosiły 5489 tys. ton, a w roku 2001 - 7300 tys. ton. W Wietnamie zebrano w 1995 roku 4%, a w 2001 roku 12, 3% światowego zbioru kawy. **O ile** punktów procentowych zbiory kawy w Wietnamie były większe w 2001 roku w porównaniu z 1995 rokiem. **O ile** procent wzrosły zbiory kawy w Wietnamie w 2001 roku w porównaniu z rokiem 1995?
24. Liczba osobników pewnego zagrożonego wyginięciem gatunku zwierząt wzrosła w stosunku do liczby tych zwierząt z 31 grudnia 2011 roku o 120% i obecnie jest równa 8910. **Oblicz** ile zwierząt liczyła populacja tego gatunku w ostatnim dniu 2011 roku.
25. Oprocentowanie na długoterminowej lokacie w pewnym banku wynosi 3% w skali roku (już po uwzględnieniu podatków). Po każdym roku oszczędzania są doliczane odsetki od aktualnego kapitału znajdującego się na lokacie – zgodnie z procentem składanym. **Dokończ** zdanie. **Zaznacz** właściwą odpowiedź spośród podanych.
- Po 10 latach oszczędzania w tym banku (i bez wypłacania kapitału ani odsetek w tym okresie) kwota na lokacie będzie większa od kwoty wpłaconej na samym początku o (w zaokrągleniu do 1%)
- A.** 30% **B.** 34% **C.** 36% **D.** 43%

26. **Wykaż**, że suma trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielna przez 3.
27. **Wykaż**, że iloczyn:
- trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 6,
 - trzech kolejnych liczb parzystych jest podzielny przez 48,
 - czterech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 24.
28. **Wykaż**, że liczba postaci:
- $4^{2017} + 4^{2018} + 4^{2019} + 4^{2020}$ jest podzielna przez 17,
 - $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}$ jest podzielna przez 13.
29. **Wykaż**, że liczba $m = 5^{97} + 5^{98} + 5^{99} + 5^{100}$ dzieli się przez:
- dwie kolejne liczby naturalne;
 - dwie kolejne liczby naturalne dwucyfrowe.
30. **Wykaż**, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ liczba $(2n + 1)^2 - 1$ jest podzielna przez 8.
31. **Udowodnij**, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej k liczba $k^4 + 2k^3 - k^2 - 2k$ jest liczbą podzielną przez 12. Zapisz pełny tok rozumowania.
32. **Udowodnij**, że dla każdej liczby naturalnej n liczba $20n^2 + 30n + 7$ przy dzieleniu przez 5 daje resztę 2.
33. **Udowodnij**, że każda liczba całkowita k , która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 2, ma tę własność, że reszta z dzielenia liczby $3k^2$ przez 7 jest równa 5.
34. Liczbą palindromiczną nazywamy liczbę naturalną, która czytana z prawej do lewej lub z lewej do prawej daje tę samą liczbę np.: 5225. **Udowodnij**, że liczba czterocyfrowa palindromiczna jest podzielna przez 11.
35. **Wykaż**, że liczba $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2022} + 2^{2023}$ jest liczbą podzielną przez 3 i nie jest liczbą podzielną przez 6.
36. **Udowodnij**, że suma sześciątów trzech kolejnych liczb całkowitych niepodzielnych przez 4 jest liczbą podzielną przez 36.
37. Niech a, b będą liczbami całkowitymi, dla których zachodzi równość $2a^2 + a = 3b^2 + b$. **Wykaż**, że jeśli 5 jest dzielnikiem liczby $a - b$, to 25 również jest dzielnikiem liczby $a - b$.
38. Rozpatrzmy liczby naturalne większe od 1000, w których zapisie występuje tylko cyfra 1:

$$a = \underbrace{11\dots111}_n$$

Wykaż, że jeśli liczba a zapisana za pomocą n jedynek jest liczbą pierwszą, to liczba n również jest liczbą pierwszą.